VISIT…

LANZAROTE Caliente.com

4. COMPORTAREA MECANICĂ A ELEMENTELOR DE REZISTENȚĂ

4.1. Aspectul fizic

Analiza tensiunilor, respectiv a deformațiilor s-a studiat separat, independent una de alta şi fără a se ține seama de caracteristicile fizico-mecanice ale materialului din care este confecționat ER. În realitate, însă, tensiunile şi deformațiile depind una de alta şi interdependența este în funcție directă de proprietățile fizico-mecanice ale materialului ER.

În rezistența materialelor se analizează starea de tensiune şi respectiv starea de deformație a corpurilor în echilibru. Echilibrul în rezistența materialelor, numit **echilibru static,** diferă de echilibrul din mecanică care presupune accelerație nulă. ER sub acțiunea forțelor, în echilibru, se deformează şi deci **unele părți ale sale se vor mişca față de altele.** Mişcarea va fi accelerată până ce se atinge o anumită deformație. **Procesul de deformație va lua sfârşit când forțele interne, cauzate de deformație, ajung să fie suficient de mari pentru a echilibra acțiunea forțelor exterioare.** Când acest stadiu este atins ER va fi din nou în echilibru. **Dacă forțele interioare nu vor putea fi atât de mari încât să oprească deformațiile, ER se va rupe.**

Încărcarea se numeşte statică dacă forțele sunt astfel aplicate încât creşterea deformațiilor este mică şi se poate presupune că efectul accelerației este neglijabil pe durata procesului de deformare. Un asemenea proces se numeşte **proces cvasi-static.** În cele ce urmează se va înțelege prin **încărcare statică**, procesul cvasi-static produs de sarcini.

Aspectul fizic în rezistența materialelor reprezintă relațiile de legătură între tensiuni şi deformații. Aceste relații precum şi proprietățiile fizico-mecanice ale materialelor se stabilesc pe cale experimentală (prin încercări mecanice).

4.2. Încercarea la tracțiune

4.2.1. Epruveta

Legătura dintre tensiuni şi deformații se poate stabili, mai simplu şi convenabil, pe un ER lung în care există o stare uniaxială de tensiune. Pentru aceasta se consideră o epruvetă (fig.4.1) acționată axial, la cele două capete, de forțele F (fig. 4.1,a). Starea uniaxială de tensiune se observă pe elementul de volum, decupat din bară (fig. 4.1,c).

Ecuația de echilibru pentru partea din stânga a epruvetei (fig. 4.1,b) este;

$$\mathbf{F} - \int_{\mathbf{A}} \sigma \cdot \mathbf{dA} = 0.$$

Acceptând **ipoteza că tensiunile normale sunt uniform distribuite pe întreaga secțiune** (σ = ct.) din ecuația de echilibru de mai sus se obține $F = \sigma \cdot A_0$, din care rezultă;

$$\sigma = \frac{\mathbf{F}}{\mathbf{A_0}}. \quad \textbf{(4.1)}$$

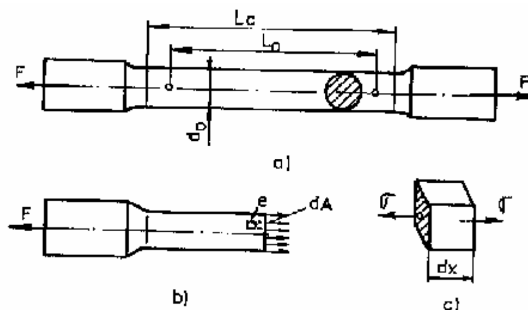


Fig. 4.1

Încercarea la tracţiune a metalelor se poate efectua pe o epruvetă cilindrică din oţel ca cea din figura (4.1,a) , conform SR EN 10002-1; 1994. Aceasta are acelaşi diametru pe **lungimea calibrată L_c.** Pe această lungime se marchează două repere la distanţa L_0 , numită **lungimea între repere. Lungimea epruvetei** se consideră ca fiind lungimea între repere L_0 .

Alungirea elementului dx este;

$$\Delta dx = \varepsilon \cdot dx,$$

iar alungirea epruvetei (între cele două repere) va fi ;

$$L = \int_0^{L_0} \Delta dx = \int_0^{L_0} \varepsilon \cdot dx.$$

Acceptând ipoteza că lungimea specifică este aceeaşi pe toată lungimea calibrată (ε = ct.), din relaţia de mai sus se obţine ;

$$\Delta L = \varepsilon \cdot L_0; \ \varepsilon = \frac{\Delta L}{L_0}. \qquad (4.2)$$

4.2.2. Maşina de încercări mecanice şi aparate de măsură

Capetele epruvetelor au diverse forme, alese corespunzător dispozitivelor de fixare ale **maşinii de încercat.** Maşina de încercat este o presă specială ce asigură creşterea lentă a forţei axiale F şi măsurarea precisă a valorii acesteia în condiţii de viteză de încărcare prescrisă.

Alungirea epruvetei (intre repere) se măsoară, cu un aparat numit **extensometru,** concomitent cu măsurarea forţei axiale. Extensometrul se fixează pe epruvetă prin două perechi de cuţite de fixare: o pereche fixă şi cealaltă mobilă. Acestea se prind pe epruvetă în dreptul reperelor (la distanţa L_0).

4.2.3. Diagrama încercării la tracţiune

În timpul creşterii sarcinii se citesc, simultan, valorile intermitente ale sarcinii, respectiv ale alungirii. Multe laboratoare dispun de instalații ce înregistrează diagrama forță - alungire. **Diagrama încercării la tracțiune** F = f(Δl), înregistrată de către aparatură sau reprezentată pe baza măsurătorilor, pentru oțel moale, are forma din figura (4.2,a). Pentru a obține diagrama σ = f(ε), se utilizează relațiile (4.1) şi (4.2); se împarte sarcina F la **aria inițială A_0** şi respectiv alungirea ΔL la **lungimea inițială L_0.** Reprezentând grafic datele obținute, în sistemul de axe; abscisă- **alungirile specifice** ε şi ordonată - **tensiunile** σ, se obține **curba caracteristică a materialului.** Pentru oțel, aceasta arată ca în figura (4.2,b).

Pentru calculul de rezistență prezintă interes o parte din curba caracteristică şi anume OPECC′A.

4.3. Caracteristicile elastice şi mecanice ale materialelor

Curba caracteristică are o serie de puncte deosebite, numite limite, ce definesc următoarele mărimi caracteristice;

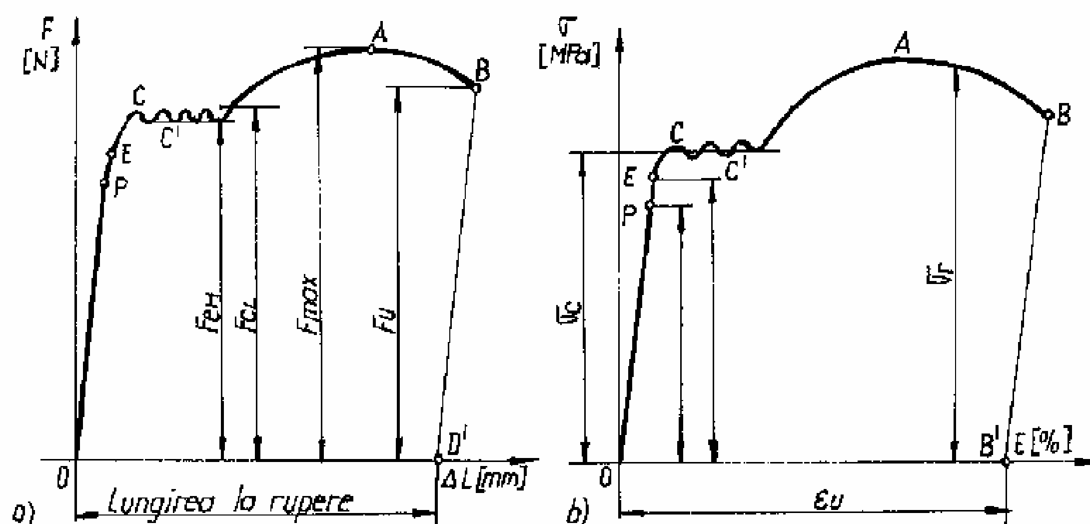


Fig. 4.2

a) **Limita de proporționalitate**, marcată pe curbă de punctul P, este tensiunea maximă până la care există **liniaritate între tensiuni** şi deformații ($\sigma_p = \frac{F_p}{A_0}$).

Ecuația zonei de proporționalitate (a porțiunii OP) este;

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \qquad \textbf{(4.3)}$$

şi se numeşte **Legea lui Hooke**. Aceasta arată că, **până la limita de proporționalitate alungirile specifice sunt proporționale cu tensiunile** .

Caracteristica E se numeşte **modul de elasticitate longitudinal** (modulul lui Young). Fiecare material are o valoare unică a acestei caracteristici, ce este o **măsură a rigidității materialului** respectiv. Astfel oțelurile, indiferent de calitatea acestora, au în medie; $E_{OL} \cong 210$ GPa, iar aluminiul $E_{AL} \cong 75$ GPa.

Valorile modulelor de elasticitate şi ale caracteristicilor elastice pentru diferite materiale sunt date, în tabele (vezi anexa 2).

Numai două materiale au curba caracteristică cu zonă de proporționalitate, **oțelul şi lemnul. Acestea `ascultă de legea lui Hooke`.** Celelalte materiale au caracteristici curbilinii. Deoarece este util să se utilizeze legea lui Hooke şi la aceste materiale, prin SR EN 10002-1,2; 1994, se definesc termeni specifici pentru modulul de elasticitate.

Aici se vor defini numai;

b) **Modulul de elasticitate convențional liniar**, care este raportul dintre tensiune şi alungirea specifică corespunzătoare, la metalele care prezintă o porțiune elastică liniară a curbei caracteristice de tracțiune;

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}. \qquad \textbf{(4.4)}$$

Pentru alte materiale este necesar să se consulte SR EN 10002-1,2; 1994.

c) **Limita de elasticitate**, marcată pe curba caracteristică prin punctul E (fig.4.2,b), este valoarea tensiunii maxime, până la care materialul este perfect elastic;

$$\sigma_e = \frac{F_E}{A_0}. \qquad \textbf{(4.5)}$$

Experiențele au arătat că nu există nici un material perfect elastic, adică după descărcarea de forță nu revine la lungimea inițială. Toate materialele, **chiar la o solicitare relativ mică, prezintă, o deformație permanentă.** Valoarea acestei deformații depinde de mărimea sarcinii aplicate.

d) **Limita de curgere (aparentă)**, marcată pe curba caracteristică prin punctul C (fig.4.2,b) şi este valoarea tensiunii la care alungirea creşte cu toate că sarcina se păstrează aproape constantă (fig.4.2,b);

$$\sigma_c = \frac{F_c}{A_0}. \qquad \textbf{(4.6)}$$

În SR EN 10002-1; 1994 limita de curgere se notează şi cu R_c.

După atingerea limitei de curgere epruveta continuă să se deformeze plastic, fără creşterea tensiunii. Curba caracteristică are un traseu oscilant, între **limita de curgere superioară σ_{cs} şi limita de curgere inferioară σ_{ci}.** Valoarea medie a oscilațiilor se poate aproxima printr-o dreaptă, ce se numeşte **palier de curgere** CC′ (fig.4.2). Deformația plastică ce se produce pentru palierul de curgere (CC′) este, la oțel moale, de 20...50 ori mai mare decât la cea elastică (abscisa punctului E).

Deformația plastică din perioada curgerii apare ca urmare a lunecării relative între faliile formate şi înclinate la 45° față de axa epruvetei, fără slăbirea coeziunii dintre falii.

Din această cauză, la atingerea limitei de curgere, apar linii fine înclinate, de culoare mai închisă, la 45° față de axa epruvetei, numite **linii Lüders - Cernov.** Liniile se înmulțesc formând benzi, care se lățesc progresiv până ce cuprind toată porțiunea calibrată a epruvetei. Liniile reprezintă urmele planelor de lunecare a materialului, în care tensiunile tangențiale sunt maxime ($\tau_{max} = \sigma_c / 2$).

După ce liniile Lüders au acoperit întreaga porțiune calibrată a epruvetei tensiunea începe să crească împreună cu deformația. Pe curba caracteristică, această porțiune este reprezentată de curba CA (fig.4.2) şi este numită **zonă de întărire.**

Dacă dintr-un punct de pe această zonă, în loc să se continue încărcarea, se descarcă lent din punctul M, în cursul descărcării se obține o relație liniară între σ şi ε . Porțiunea MO′ este o dreaptă paralelă cu OP (fig.4.2,b). La reîncărcarea epruvetei se parcurge dreapta O′M, astfel că materialul se comportă elastic până în punctul M. Deci, punctul M reprezintă o nouă limită de elasticitate a materialului, superioară celei determinate la început. Această operație, de mărire a limitelor $\sigma_p = \sigma_E = \sigma_c = \sigma_M$ se numeşte **ecruisare.**

e) Rezistența la rupere a materialului, marcată pe curba caracteristică prin punctul A (fig.4.2,b) este valarea maximă a tensiunii şi se notează cu σ_r (R_m în SR EN 10002-1; 1994)

$$\sigma_r = \sigma_{max} = \frac{F_{max}}{A_0},$$

unde;

$$A_0 = \frac{\pi \cdot d_0^2}{4}$$ este aria secțiunii inițiale.

f) La epruvetele confecționate din oțel moale (tenace) când sarcina se apropie de valoarea F_{max}, se produce **gâtuirea epruvetei**. În locul de gâtuire secțiunea scade până când se produce ruperea bruscă, cu zgomot (fig.4.3). După apariția gâtuirii, sarcina F aplicată epruvetei scade, ceea ce este reprezentat pe curba caracteristică prin zona AB (fig.4.2).

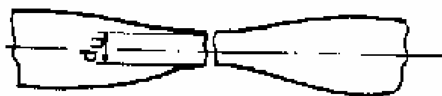


Fig. 4.3

Măsurând diametrul epruvetei la o încărcare oarecare de pe porțiunea AB (după apariția gâtuirii) şi calculând aria corespunzătoare se poate determina **gâtuirea specifică.**

$$\psi = \frac{A_0 - A}{A_0}. \qquad \textbf{(4.8,a)}$$

Pentru o epruvetă ruptă **gâtuirea** la rupere este;

$$\mathbf{Z = \frac{A_0 - A_u}{A_0} \cdot 100[\%]} \qquad \textbf{(4.8,b)}$$

unde;

$\mathbf{A_u = \frac{\pi \cdot d_u^2}{4}}$ este aria secțiunii de rupere.

g) Aşezând cele două bucăți ale epruvetei rupte, cap la cap, se poate măsura **lungirea ultimă între repere, L_u** şi se poate determina **alungirea specifică la rupere** (conform SR EN 10002-1; 1994)**;**

$$\mathbf{A_r = \varepsilon_r = \frac{L_u - L_0}{L_0} = \frac{\Delta L_u}{L_0}}. \qquad \textbf{(4.9)}$$

h) Experimental s-a evidențiat că o dată cu alungirea unei bare (epruvete) apare o micşorare a secțiunii numită **contracție transversală**. S-a constatat că pentru domeniul liniar-elastic această contracție este proporțională cu alungirea specifică. Ca atare la o alungire specifică a epruvetei cu ε_x corespunde o contracție transversală proporțională cu alungirea ε_x;

$$\varepsilon_{tr} = \varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \cdot \varepsilon_x,$$

unde;

ν - este **coeficientul de contracție transversală** sau **coeficientul lui Poisson.**

Coeficientul lui Poisson este o caracteristică elastică de material. Valoarea acestuia este cuprinsă între 0,16 şi 0,42 şi este dată în tabele. Dacă deformația este plastică, corpul nu-şi modifică volumul şi $\nu = 0,5$.

Mărimile; **limita de curgere (σ_c), rezistența la rupere (σ_r), alungirea la rupere (ε_r), şi gâtuirea la rupere (Z) se numesc caracteristici mecanice ale materialului.** Constantele; **modulul de elasticitate longitudinal (E), coeficientul de contracție transversală (ν), limita de proporționalitate (σ_p), limita de elasticitate (σ_e) se numesc caracteristici elastice ale materialului.**

Cunoaşterea acestora are o importanță deosebită pentru folosirea corectă a materialelor în calculul de rezistență.

Pentru OL 37 caracteristicile mecanice şi elastice, după STAS 1500-75, sunt;

$\sigma_r = 370...450MPa$ $E = 210GPa$

$\sigma_c = 210...240MPa$ $\nu = 0,24...0,28$

$\varepsilon_r = 25...26\%$ $\sigma_e \cong \sigma_p = 200MPa$

$Z = 60...70\%$

4.4. Diferite forme de curbe caracteristice

4.4.1. Curba caracteristică convențională

Pe durata încercării la tracțiune a epruvetei, aria secțiunii transversale a acesteia se micşorează datorită contracției transversale. Tensiunea reală, determinată cu relația;

$$\sigma = \frac{F}{A}, \qquad \textbf{(4.11)}$$

va da valori mai mari decât cele obținute din relația (4.1), întrucât $A < A_0$. Diagrama dependenței funcționale obținută pe baza relației (4.11) se numeşte **curba caracteristică reală** (linia întreruptă din figura 4.4). Diagrama trasată pe baza ecuației (4.1) se numeşte **curbă caracterstică convențională.**

Datorită faptului că în relația (4.1), aria inițială A_0 este o constantă, curba caracteristică convențională are valori inferioare curbei reale. Întrucât diferențele între cele două curbe sunt extrem de mici până la limita de curgere, şi cum în calculele de rezistență se foloseşte porțiunea de curbă până la limita de curgere se preferă curba caracteristică convențională.

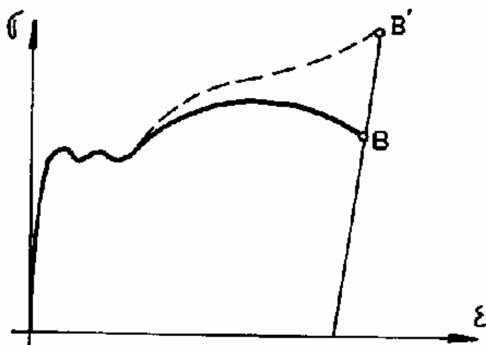


Fig. 4.4

4.4.2. Curba caracteristică a oțelului la compresiune

Pentru efectuarea încercării la compresiune a oțelului se utilizează epruvete care au diametrul egal cu înălțimea conform STAS 1552-78;

$d_0 = h_0 = 10...30$ mm.

În urma încercării la compresiune a epruvetelor din oțel s-a constatat că se obțin aceleaşi valori, ca şi la tracțiune, pentru mărimile σ_p, σ_e, σ_c şi E. La oțelurile de rezistență mică nu se realizează ruperea: epruveta turtindu-se cu atât mai mult cu cât creşte forța (fig.4.5) şi încărcarea se consideră terminată când $h = h_0 / 2$.

4.4.3. Curba caracteristică a oțelului la răsucire

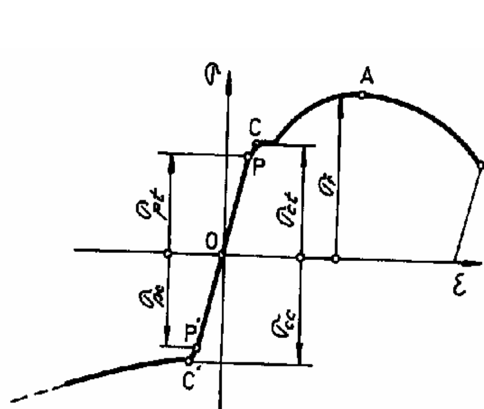


Fig. 4.5

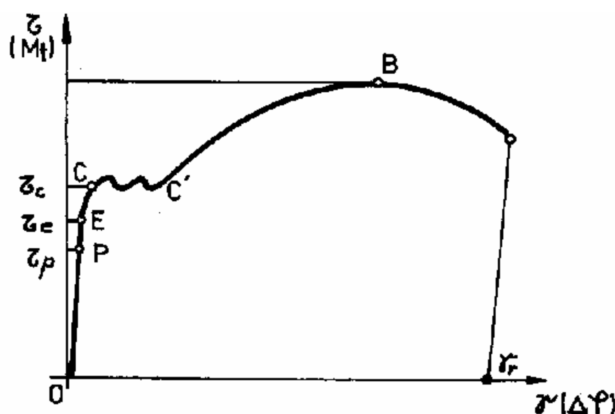


Fig. 4.6

Efectuând încercarea la răsucire a unei epruvete din oțel şi trasând curba caracteristică (tensiunea tangențială în funcție de lunecarea specifică) se obține o curbă caracteristică ca în figura 4.6, similară celei de la tracțiune. Pe această curbă se pot defini; limita de proporționalitate τ_p, limita de elasticitate τ_e, limita de curgere τ_c, rezistența la rupere τ_r şi lunecarea la rupere γ_r. Partea rectilinie, OP a acestei curbe, are ecuația;

$$\tau = G \cdot \gamma \qquad \textbf{(4.12)}$$

care poartă numele de **legea lui Hooke pentru solicitarea de răsucire** (a doua lege a lui Hooke).

Caracteristica G, se numeşte **modul de elasticitate transversal** şi pentru oțel are valoarea G = 81 GPa.

4.4.4. Curbe caracteristice la materiale care nu respectă legea lui Hooke

Celor mai multe din materiale le corespund curbele caracteristice curbilinii fără nici o porțiune rectilinie. Astfel, fonta, alama, cuprul, betonul, cauciucul au curbe caracteristice ca în figura (4.7,a), iar altele cum ar fi fibrele textile ca în figura (4.7,b).

Fonta are curba caracteristică curbilinie atât pentru tracțiune cât şi pentru compresiune . Se observă că fonta rezistă mai bine la compresiune decât la întindere (fig.4.8).

Betonul, este materialul cel mai des utilizat de constructori la compresiune, deoarece are rezistența la tracțiune foarte mică.

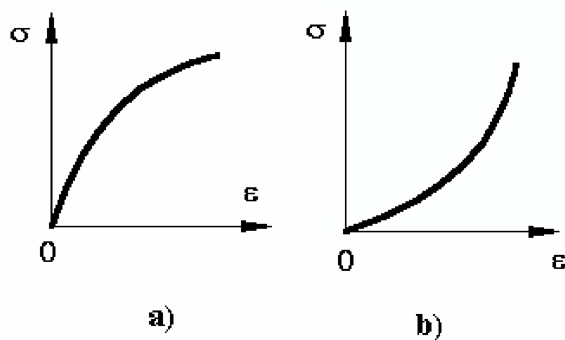


Fig. 4.7

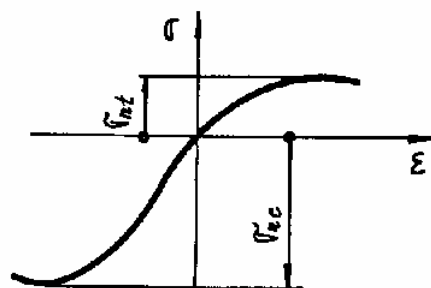


Fig. 4.8

4.5. Expresii analitice pentru curba caracteristică idealizată

Numai o porţiune din curba caracteristică şi anume OP (fig.4.2,b), pentru oţel şi lemn este descrisă de ecuaţia $\sigma=E\cdot\varepsilon$. Astfel cea mai mare parte din curba caracteristică a oţelului şi toate curbele caracteristice pentru celelalte materiale nu sunt descrise prin ecuaţii liniare.

Întrucât în rezistenţa materialelor sunt necesare, pentru calcul, ecuaţii simple, explicite ale dependenţei $\sigma=f(\varepsilon)$, curba caracteristică a fost aproximată printr-o **curbă caracteristică idealizată** numită **diagramă schematizată**.

Diagrama schematizată se obţine prin trasarea unei linii, frânte sau curbe, cât mai apropiate de curba caracteristică reală, dar care să aibă o ecuaţie cât mai simplă. Ca urmare se utilizează frecvent următoarele schematizări;

-prin linii drepte şi/sau,

-prin linii curbe continue.

La schematizarea prin linii drepte se admite că limita de proporţionalitate coincide cu limita de curgere a materialului.

În figura 4.9 s-a reprezentat schematizarea prin linii drepte a materialelor **elasto-plastice ideale**, sau **diagrama schematizată tip Prandtl** şi care corespunde cel mai bine pentru oţelurile de rezistenţă mică şi mijlocie. Schematizarea s-a făcut prin două drepte;

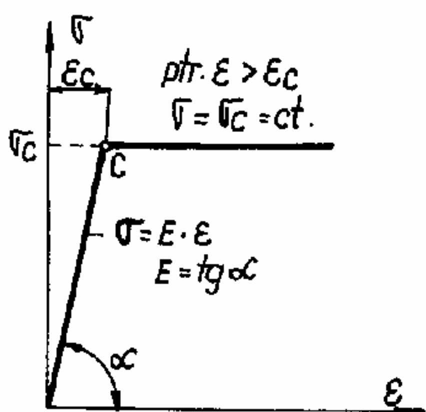


Fig. 4.9

$$\sigma = E\cdot\varepsilon \qquad \textbf{(4.13)}$$

pentru domeniul elastic ($\varepsilon \leq \varepsilon_c$) şi

$$\sigma = \sigma_c = ct. \qquad \textbf{(4.14)}$$

pentru domeniul plastic ($\varepsilon > \varepsilon_c$).

În cazul materialelor care nu satisfac legea lui Hooke, curba caracteristică poate fi asimilată cu o curbă continuă (fig. 4.10) având relaţia;

$$\varepsilon = \frac{\sigma^n}{E_C}, \qquad (4.15)$$

unde E_c şi n sunt constante ce se determină astfel ca funcţia adoptată să fie cât mai apropiată de curba reală, stabilită experimental. Astfel, pentru coordonatele a două puncte $A(\varepsilon_1, \sigma_1)$ şi $B(\varepsilon_2, \sigma_2)$, din ecuaţia (4.15) se obţin valorile constantelor;

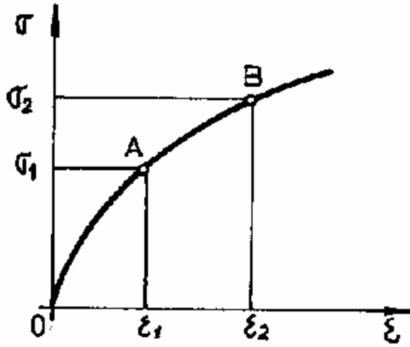


Fig. 4.10

$$E_C = \frac{\sigma_1^n}{\varepsilon_1} = \frac{\sigma_2^n}{\varepsilon_2}, \qquad (4.16)$$

$$n = \frac{\mathrm{Ln}\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}{\mathrm{Ln}\frac{\sigma_2}{\sigma_1}}. \qquad (4.17)$$

Schematizări similare celor de mai sus se pot face şi pentru curbe caracteristice corespunzătoare încercării la compresiune sau la torsiune .

4.6. Legea generalizată a lui Hooke

Legea lui Hooke, exprimată prin relaţiile (4.3) şi (4.12) a fost determinată pe cale experimentală pentru o solicitare simplă, respectiv pentru o stare monoaxială de tensiune. Aceasta va fi generalizată pentru starea spaţială de tensiune. Pentru aceasta se consideră un element de volum paralelipipedic infinit mic, pe feţele căruia acţionează, succesiv, tensiunile principale σ_1, σ_2 şi σ_3 conform figurii 4.11.

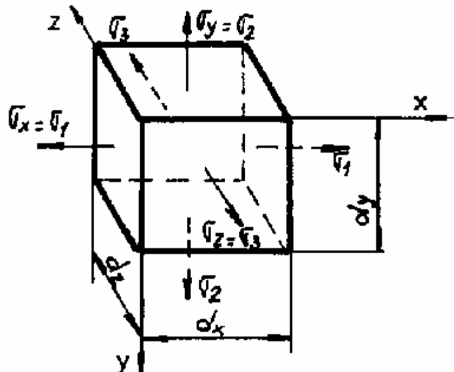


Fig.4.11

a) când $\sigma_1 > 0$ iar $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$, tensiunea σ_1 produce următoarele deformaţii; o alungire specifică, $\varepsilon_1^{'}$, pe direcţia lui σ_1 şi două scurtări specifice $\varepsilon_2^{'}$ şi $\varepsilon_3^{'}$ pe direcţiile 2 şi3.

Ținând seama de (4.9) şi (4.10) deformațiile specifice rezultă;

$$\varepsilon_1^{'} = \frac{1}{E}\cdot\sigma_1; \qquad \varepsilon_2^{'} = \varepsilon_3^{'} = -\nu\cdot\varepsilon_1 = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_1;$$

b) când $\sigma_2 > 0$ iar $\sigma_1 = \sigma_3 = 0$, tensiunea σ_2 produce pe cele 3 direcții deformațiile; o lungire specifică $\varepsilon_2^{''}$ pe direcția lui σ_2 şi două scurtări specifice $\varepsilon_1^{''}$ şi $\varepsilon_3^{''}$ pe celelalte două direcții, date de relațiile;

$$\varepsilon_2^{''} = \frac{1}{E}\cdot\sigma_2: \qquad \varepsilon_1^{''} = \varepsilon_3^{''} = -\nu\cdot\varepsilon_2^{''} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_2:$$

c) când $\sigma_3 > 0$ iar $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, tensiunea σ_3 produce pe cele 3 direcții deformațiile; o lungire specifică $\varepsilon_3^{''}$ pe direcția lui σ_3 şi două scurtări specifice după celelalte direcții $\varepsilon_1^{''}$ şi $\varepsilon_2^{''}$, date de relațiile;

$$\varepsilon_3^{'''} = \frac{1}{E}\cdot\sigma_2 \qquad \varepsilon_1^{'''} = \varepsilon_2^{'''} = -\nu\cdot\varepsilon_3^{'''} = -\frac{\nu}{E}\cdot\sigma_3 .$$

Dacă acționează simultan cele trei tensiuni principale deformațiile specifice totale rezultă prin însumarea efectelor de mai sus (conform principiului suprapunerii efectelor);

$$\begin{aligned}
\varepsilon_1 &= \varepsilon_1^{'} + \varepsilon_1^{''} + \varepsilon_1^{'''} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_1 - \nu\cdot\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right],\\
\varepsilon_2 &= \varepsilon_2^{'} + \varepsilon_2^{''} + \varepsilon_2^{'''} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_2 - \nu\cdot\left(\sigma_3 + \sigma_1\right)\right],\\
\varepsilon_3 &= \varepsilon_3^{'} + \varepsilon_3^{''} + \varepsilon_3^{'''} = \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_3 - \nu\cdot\left(\sigma_1 + \sigma_2\right)\right].
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.18)}$$

Dacă axele Oxyz nu coincid cu direcțiile principale atunci tensiunile normale de pe aceste direcții produc lungirile specifice;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_x - \nu\cdot\left(\sigma_y + \sigma_z\right)\right],\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_y - \nu\cdot\left(\sigma_z + \sigma_x\right)\right],\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}\cdot\left[\sigma_z - \nu\cdot\left(\sigma_x + \sigma_y\right)\right].
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.19,a)}$$

iar tensiunile tangențiale produc lunecările specifice;

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad , \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad , \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \qquad \textbf{(4.19,b)}$$

Relațiile (4.18) şi (4.19) exprimă **legea lui Hooke generalizată**.

Elementul de volum infinit mic dV = dx · dy· dz, din figura 4.11, prin solicitare îşi modifcă volumul. Acesta devine;

$$dV + \Delta \cdot dV = dx \cdot (1 + \varepsilon_x) \cdot dy \cdot (1 + \varepsilon_y) \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_z).$$

Neglijând infiniții de ordin superior expresia volumului modificat este;

$$dV + \Delta dV = dx \cdot dy \cdot dz \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = dV \cdot (1 + \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z),$$

iar variația volumului rezultă;

$$\Delta dV = (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) \cdot dV.$$

Raportul între variația de volum şi volumul inițial, numită **deformația volumică specifică**, este;

$$\varepsilon_V = \frac{\Delta dV}{dV} = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z. \qquad \textbf{(4.20)}$$

Înlocuind deformațiile specifice ε_x, ε_y şi ε_z cu expresiile (4.19) se obține;

$$\varepsilon_V = \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right). \qquad \textbf{(4.20,a)}$$

Ținând seama că tensiunea medie este;

$$\sigma_m = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}, \qquad \textbf{(4.21)}$$

se obține;

$$e_V = 3 \cdot \frac{1 - 2 \cdot \nu}{E} \cdot \sigma_m = \frac{\sigma_m}{K}. \qquad \textbf{(4.22)}$$

Expresia (4.22) poartă denumirea de **ecuația lui Poisson**, iar constanta;

$$K = \frac{E}{3 \cdot \left(1 - 2 \cdot \nu\right)} \qquad \textbf{(4.23)}$$

se numeşte **modul de elasticitate cubică**.

Relația (4.22) este similară legii lui Hooke şi poate fi scrisă sub forma;

$$\sigma_m = \mathbf{K} \cdot \varepsilon_V. \qquad \textbf{(4.24)}$$

În cazul particular al **stării plane de tensiune** (**$\sigma_z = \tau_{zx} = \tau_{xz} = \tau_{zy} = \tau_{yz} = 0$**), legea lui Hooke generalizată devine;

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y\right), \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E} \cdot \left(\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x\right), \\
\varepsilon_z &= -\frac{\nu}{E} \cdot \left(\sigma_x + \sigma_y\right), \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.25)}$$

În mod similar ecuațiilor (4.25), din ecuațiile (4.19) se poate deduce legea lui Hooke pentru starea plană de deformație ($\varepsilon_z = \gamma_{zy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = \gamma_{xz} = 0$).

În practica inginerească se cere foarte des să se determine tensiunile funcție de deformațiile măsurate pentru starea plană. În acest caz din sistemul (4.25), se obține;

$$\begin{aligned}
\sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\varepsilon_x + \nu \cdot \varepsilon_y\right), \\
\sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \left(\varepsilon_y + \nu \cdot \varepsilon_x\right), \\
\tau_{xy} &= G \cdot \gamma_{xy}.
\end{aligned} \qquad \textbf{(4.26)}$$

4.7. Relația dintre caracteristicile elastice

O cale relativ simplă pentru a stabili relația dintre modulul de elasticitate longitudinal E, cel transversal G şi coeficientul de contracție transversală ν este analizarea stării de tensiune, la forfecare pură. Acest caz, figura (4.12,a), poate fi reprezentat prin punctele T_1 şi T_2 de pe cercul lui Mohr. Dar aceleaşi stări de tensiune, reprezentate prin punctele T_1 şi T_2 de pe cerc (fig.4.12,c), le corespund

starea de tensiune din figura (4.12,b), reprezentate pe cercul lui Mohr prin punctele S_1 şi S_2.

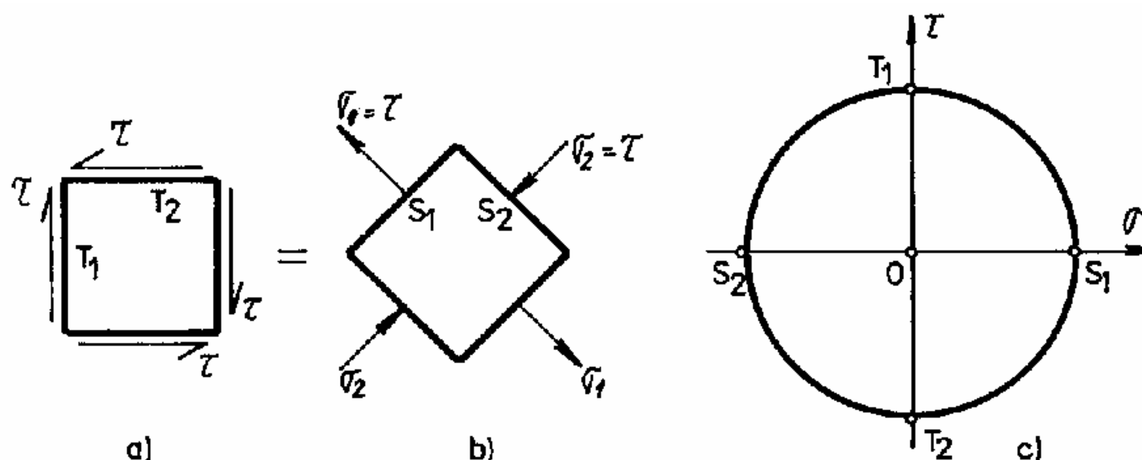


Fig.4.12

Deci starea de forfecare pură este echivalentă cu starea plană, în care tensiunile principale sunt egale în valoare cu tensiunea tangenţială şi au sensul opus (fig.4.12,b);

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \tau_{max} \quad \textbf{(4.27)}$$

Ținând seama de aceasta în relațiile (4.25) se obține;

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_1 - \nu \cdot \sigma_2) = \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{max} \quad , \quad \varepsilon_2 = \frac{1}{E} \cdot (\sigma_2 - \nu \cdot \sigma_1) = -\frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{max} .$$

Întrucât lunecarea specifică maximă se obține din relația (4.17) rezultă;

$$\gamma_{max} = \varepsilon_1 - \varepsilon_2 = 2 \cdot \frac{1+\nu}{E} \cdot \tau_{max}$$

Ținând seama că $\tau_{max} = G \cdot \gamma_{max}$, din relația de mai sus se obține;

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)} . \quad \textbf{(4.28)}$$

Formula (4.28) reprezintă relația dintre caracteristicile E, G şi ν. Pentru oțel, cu E_{OL} = 210 GPa şi ν = 0,3, rezultă; G_{OL}= 81GPa.

4.8. Energia de deformație

Se consideră un element de volum dV = dx·dy·dz, asupra căruia se aplică, progresiv, tensiunile σ_x, σ_y şi σ_z. Efortul elementar ce acționează pe direcția Ox este $dN_x = \sigma_x \cdot dy \cdot dz$. Acesta produce o deplasare elementară pe direcția Ox; $\Delta dx = \varepsilon_x \cdot dx$. Astfel, se produce un lucru mecanic elementar;

$$\mathbf{dL = \frac{1}{2} \cdot dN_x \cdot \Delta dx = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dx \cdot dy \cdot dz = dU.}$$

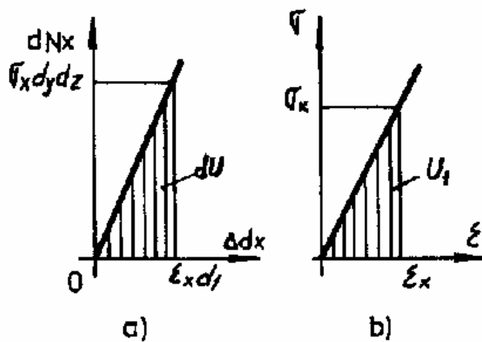


Fig.4.13

Se admite prin ipoteză că, pentru solicitările în domeniul elastic, intreg lucru mecanic se acumulează în volumul elementar sub formă de energie potențială de deformație dU. Factorul 1/2 este cauzat de aplicarea statică a efortului dN_x, adică acesta creşte lent de la valoarea zero la valoarea $\sigma_x \cdot dy \cdot dz$.

Dacă alungirea specifică ε_x este liniar elastică, (tensiunea σ_x are valori în domeniul elastic) atunci energia de deformație acumulată în elementul dV = dx ·dy ·dz este reprezentată prin aria haşurată din figura (4.13,a) şi se exprimă sub forma;

$$\mathbf{dU = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x \cdot dV.}$$

Energia pe unitatea de volum (fig.4.13,b), denumită **energie specifică de deformație**, rezultă;

$$\mathbf{U_1 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2} \cdot \sigma_x \cdot \varepsilon_x .}$$

Dacă ținem seama şi de tensiunile normale aplicate pe celelalte două direcții se obține;

$$\mathbf{U_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z\right).}$$

Tensiunile tangențiale produc, similar cu cele normale, energie potențială de deformație, respectiv energie potențială specifică. Astfel, pentru starea spațială de tensiune (fig.4.14) expresia generală a energiei specifice de deformație, rezultă;

$$\mathbf{U_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\sigma_x \cdot \varepsilon_x + \sigma_y \cdot \varepsilon_y + \sigma_z \cdot \varepsilon_z + \tau_{xy} \cdot \gamma_{xy} + \tau_{yz} \cdot \gamma_{yz} + \tau_{zx} \cdot \gamma_{zx}\right)}. \quad \textbf{(4.29)}$$

Înlocuind deformațiile specifice prin expresiile (4.19) se obține ecuația energiei specifice de deformație în funcție de tensiuni;

$$\mathbf{U_1 = \frac{1}{2E} \cdot \left[\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\nu \cdot \left(\sigma_x \cdot \sigma_y + \sigma_y \cdot \sigma_z + \sigma_z \cdot \sigma_x\right)\right] + \frac{1}{2G} \cdot \left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}. \quad \textbf{(4.30)}$$

Dacă direcțiile x, y şi z coincid cu direcțiile principale 1, 2, şi 3 ($\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$), atunci expresia energiei specifice de deformație devine;

$$\mathbf{U_1 = \frac{1}{2E} \cdot \left[\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu \cdot \left(\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1\right)\right]}. \quad \textbf{(4.31)}$$

Din această relație se pot determina expresiile energiei specifice pentru cazuri particulare;

a) pentru starea plană de tensiune;

$$\mathbf{U_1 = \frac{1}{2E} \cdot \left(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\nu \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y\right) + \frac{1}{2G} \cdot \tau_{xy}^2}, \quad \textbf{(4.32)}$$

b) pentru starea de întindere simplă;

$$\mathbf{U_1 = \frac{\sigma^2}{2E}}; \quad \textbf{(4.33)}$$

c) pentru starea de forfecare pură;

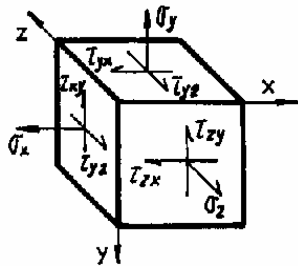


Fig.4.14

$$\mathbf{U_1 = \frac{\tau_{xy}^2}{2G}}. \quad \textbf{(4.34)}$$

Energia de deformație acumulată în ER are două efecte, **o variație a volumului** şi **o variație a formei**. Dacă elementul de volum este solicitat, pe

toate fețele de aceeaşi tensiune normală, egală cu tensiunea normală medie;

$$\sigma_m = \frac{1}{3}\cdot\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z\right),$$

atunci, elementul dV nu îşi modifică forma ci numai volumul. Astfel, întreaga energie se acumulează sub formă de **energie specifică de variație a volumului**. Ținând seama de relațiile (4.20), (4.21) şi (4.22) rezultă;

$$U_{1V} = \frac{1}{2}\cdot\varepsilon_V\cdot\sigma_m = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{1-2\nu}{E}\cdot\sigma_m^2 = \frac{3}{2}\cdot\frac{1-2\nu}{E}\cdot\frac{\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2}{9},$$

respectiv;

$$U_{1v} = \frac{1-2\cdot\nu}{6\cdot E}\cdot\left(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3\right)^2. \qquad \textbf{(4.35)}$$

Diferența dintre energia totală U_1 şi energia de variație a volumului U_{1v} reprezintă **energia specifică de variație a formei.** Ținând seama de expresiile(4.31) şi (4.35) rezultă;

$$U_{1f} = \frac{1+\nu}{6\cdot E}\cdot\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)^2 + \left(\sigma_2-\sigma_3\right)^2 + \left(\sigma_3-\sigma_1\right)^2\right]. \qquad \textbf{(4.36)}$$

Analiza energiei (energia specifică de variație a volumului şi energia specifică de variație a formei) este o consecință a descompunerii tensorului tensiunilor (fig. 4.15,a) în doi tensori (fig. 4.15, b, c). Primul tensor, numit **tensorul sferic** (fig. 4.15,b) produce numai o modificare a volumului, iar **deviatorul** (fig.4.15,c) produce schimbarea formei fără să schimbe volumul.

Cele prezentate mai sus au forma analitică;

$$T_\sigma = T_s + T_d, \qquad \textbf{(4.37)}$$

sau sub formă explicită;

$$\begin{pmatrix}\sigma_1 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_m\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\sigma_1-\sigma_m & 0 & 0\\ 0 & \sigma_2-\sigma_m & 0\\ 0 & 0 & \sigma_3-\sigma_m\end{pmatrix} \qquad \textbf{(4.38)}$$

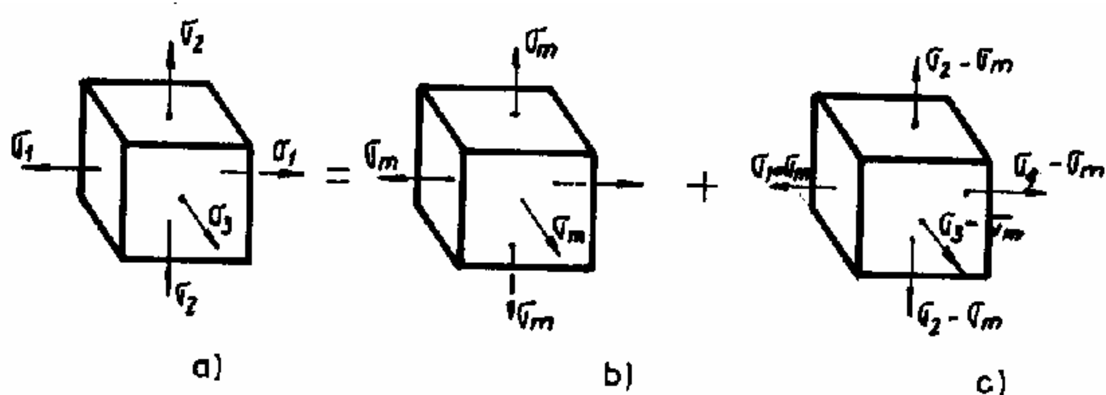


Fig. 4.15

Aplicația 4.1. Un element de rezistență din oțel (E = 210 GPa) solicitat după trei direcții perpendiculare, are alungirile specifice pe cele trei direcții în raportul 5;4;3, iar tensiunea maximă este de 110 MPa şi $\nu = 0{,}25$ să se determine valorile tensiunilor şi deformațiile specifice pe cele trei direcții.

Rezolvare; Tensiunilor $\sigma_1 = 110$ MPa, σ_2 şi σ_3 le corespund alungirile specifice 5·k, 4·k şi 3·k, astfel că din (4.19) se obține;

$$\sigma_1 - \nu \cdot (\sigma_2 + \sigma_3) = 5 \cdot k \cdot E, \qquad (a)$$

$$\sigma_2 - \nu \cdot (\sigma_3 + \sigma_1) = 4 \cdot k \cdot E, \qquad (b)$$

$$\sigma_3 - \nu \cdot (\sigma_1 + \sigma_2) = 3 \cdot k \cdot E. \qquad (c)$$

Din (a) şi (c) rezultă;

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 1{,}6 \cdot k \cdot E, \qquad (d)$$

iar din (a) şi (b) ;

$$0{,}9375 \cdot \sigma_1 - 0{,}3125 \cdot \sigma_2 = 6 \cdot k \cdot E, \qquad (e)$$

Din (d) şi (b), prin înlocuire se obține;

$$\sigma_3 = 7{,}2 \cdot k \cdot E, \quad \sigma_1 = 8{,}8 \cdot k \cdot E, \quad \sigma_2 = 8 \cdot k \cdot E. \qquad (f)$$

Raportul acestora este 11;10;9.

Din prima relație (f) se obține;

$$k = \frac{\sigma_1}{8{,}8 \cdot E} = \frac{110}{8{,}8 \cdot 2 \cdot 10^5} = 6{,}25 \cdot 10^{-5},$$

sau înlocuind în (f) se obțin tensiunile;

$$\sigma_1 = 8{,}8 \times 6{,}25 \times 2 = 110 \text{ MPa}, \quad \text{(verificare)}$$
$$\sigma_2 = 8 \times 6{,}25 \times 2 = 100 \text{ MPa},$$
$$\sigma_3 = 7{,}2 \times 6{,}25 \times 2 = 90 \text{ MPa}.$$

Alungirile specifice principale vor fi;

$$\varepsilon_1 = 5 \cdot k = 5 \times 6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^6 = 312{,}5 \;\; \mu m / m,$$
$$\varepsilon_2 = 4 \cdot k = 4 \times 6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^6 = 250 \;\; \mu m / m,$$
$$\varepsilon_3 = 3 \cdot k = 3 \times 6{,}25 \cdot 10^{-5} \cdot 10^6 = 187{,}5 \;\; \mu m / m.$$